

基于免疫 B-Cell 算法求解可满足性问题的性能分析

夏小云^{1,2}, 周育人³

(1 嘉兴学院 数理与信息工程学院, 浙江 嘉兴 314001; 2 江西理工大学 信息工程学院,
江西 赣州 341000; 3 中山大学 数据科学与计算机学院, 广东 广州 510006)

摘 要: 可满足性问题(SAT) 是计算机科学和人工智能研究中的核心 NP-完全问题. 构造了两类 SAT 问题实例, 易解和难解实例. 从理论上分析了 B-Cell 算法求解该两个实例的运行时间, 并证实了 B-Cell 算法在某些问题上有效而在一些问题上无效. 进一步提出了一个简单的基于免疫的多目标优化算法 (IBMO), 对于一个双目标的 SAT 问题, 证明了 IBMO 能够有效地找到整个 Pareto 前沿. 这些分析结果从理论上证实和说明了人工免疫系统的有效性.

关键词: 人工免疫系统; B-Cell 算法; 多目标优化; 可满足性问题; 运行时间分析

中图分类号: TP301

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2016)07-0005-06

Performance Analysis of Immune Inspired B-Cell Algorithm for the SAT Problem

XIA Xiao-yun^{1,2}, ZHOU Yu-ren³

(College of Mathematics Physics and Information Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China;

2 School of Information Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China;

3 School of Data and Computer Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The satisfiability problem is a basic core NP-complete problem in computer science and artificial intelligence. We construct two classes of SAT instances, and analyze the runtime of the B-Cell algorithm for these two instances. We proved that there exist situations where the BCA is efficient or inefficient. On the other hand, we develop a simple immune-based multi-objective optimizer (IBMO) and reveal that IBMO can find the whole Pareto front for a bi-objective sat problem in expected polynomial runtime. These analysis results exemplify and strengthen the usefulness of artificial immune systems from a theoretical perspective.

Key words: artificial immune system (AIS) ; B-Cell algorithm; multi-objective optimization; satisfiability problem; runtime analysis

1 引言

可满足性问题(Satisfiability problem, SAT)是计算机科学和人智能研究领域中最基本的核心问题之一. SAT 问题是第一个已知的 NP 完全问题^[1], 其证明由 Cook^[2] 给出. 除了其理论重要性之外, SAT 问题在软件自动化、VLSI 设计、数据检索以及机器学习等方面有着广泛的应用, 因此吸引了越来越

越多的学者及工业界研究人员的关注.

众多学者提出了许多关于 SAT 问题的经典而有效的求解方法. 主要包括完备算法^[3] 和不完备算法^[4]. 完备算法通常搜索整个搜索空间, 总能够确定一个命题公式是否是可满足的. 然而其计算效率低, 对于大规模的 SAT 问题, 时间复杂度通常是指数级的. 不完备算法不执行完全搜索, 只在有限的时间内搜索部分搜索空间, 通常不能正确判断 SAT 问题的

可满足性.

人工免疫系统 (Artificial immune Systems, AIS)^[5] 是一种基于脊椎动物免疫系统的仿生算法, 除了用于异常检测及分类之外, 还经常用于函数优化. B-Cell 算法 (B-Cell Algorithm, BCA) 是其中一种基于克隆选择原理的克隆选择算法, 由 Kelsy 和 Timmis^[6] 提出. 尽管目前有大量的关于 AIS 的应用和实验研究, 其理论研究还比较有限. AIS 严格的理论基础能够有助于更好地理解算法的工作原理, 以及探索算法的有效性.

起初, 理论研究工作主要关注于一些简单的免疫算法求解人工拟布尔函数如 OneMax、LeadingOnes 等. Jasen 和 Zarges^[7] 研究了一种连续高频变异 (somatic contiguous hypermutation, CHM) 的变异算子的性能, 指出带有 CHM 算子的 BCA 算法在求解 OneMax 和 LeadingOnes 函数上的性能略差于带有标准的位变异的 (1+1) EA 算法. 更有趣的是, 他们还证明了存在一些函数 BCA 算法的性能要优于演化算法. 在组合优化问题方面, 理论上证明了 BCA 算法在两个经典的 NP 难问题包括顶点覆盖问题^[8] 和最长公共子序列问题^[9] 的一些实例上的性能要优于演化算法.

2 问题、算法和工具

2.1 可满足性问题

布尔逻辑中, 一个文字 L 是一个变量 x_i 或者它的否定 $\bar{x}_i$ ($x_i \in \{0, 1\}$), 一个子句是若干文字的析取, 一个公式是若干子句的合取. 例如, 给定 n 个布尔变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 公式 $f(x) = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m$, 其中子句 c_i 为 n 个布尔变量上若干文字的析取. 子句的合取以及每个子句由若干文字的析取组成的形式成为合取范式 (Conjunctive Normal Form, CNF). SAT 问题是指是否存在一组对所有布尔变量的真值指派 (True 或 False), 使得整个合取范式取值为 True. SAT 问题也称为合取范式的可满足性问题.

SAT 问题最初被描述为一个判定问题. MaxSAT 问题为 SAT 问题的一般形式. 即寻找一个指派使得满足的子句数最多. 本文中考虑不带权的 MaxSAT 问题. 其适应值定义为满足的子句个数, 如下:

$$\text{fit}(x) = c_1(x) + c_2(x) + \dots + c_m(x) \quad (1)$$

式中, $c_i(x)$ ($1 \leq i \leq m$) 表示第 i 个子句的真值.

2.2 B-Cell 算法

BCA 算法是一种带有 CHM 变异算子的简单免疫算法. 该变异算子由 Jasen 和 Zarges^[7] 提出. 下面给出 CHM 变异算子的定义.

变异算子: Somatic Contiguous Hypermutation (CHM)

- 1: 均匀随机选取 $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$;
- 2: 均匀随机选取 $b \in \{0, 1, \dots, n-1\}$;
- 3: For $i = \min\{a, b\}$ to $\max\{a, b\}$ do
- 4: 以概率 $r \in [0, 1]$ 设置 $x_i = 1 - x_i$

在上述算子中, 考虑位串 $x \in \{0, 1\}^n$, x_i 为位串 x 中的第 i 位. 每一位 x_i ($\min\{a, b\} \leq i \leq \max\{a, b\}$) 以概率 $r \in [0, 1]$ 独立地翻转. 为了简单起见, 本文沿用文献^[7], 同样考虑不带克隆或者衰老算子的免疫算法, 并且免疫细胞种群大小为 1. 以下为带有 CHM 变异算子的 BCA 算法.

算法 1: B-Cell 算法

- 1: Begin
- 2: 均匀随机选取初始搜索点 $x \in \{0, 1\}^n$;
- 3: While (终止条件不满足) do;
- 4: 创建一个新解 $x' = \text{CHM}(x)$;
- 5: If $\text{fit}(x') \geq \text{fit}(x)$, then $x = x'$;
- 6: End While
- 7: End

正如 Jasen 和 Zarges^[7] 在其论文中提到的一样, 本文中考虑一种特殊情况 $r=1$. 在这种情况下, 如果待翻转的 b 位不是连续的, 则其不能一次将所有位进行变异. 相反, 如果需要变异的 b 位是连续的, 执行连续的 b 位变异概率为 $\Theta(\frac{1}{n^2})$. 而对于简单的 (1+1) EA 算法, 任意 b 位变异的概率为 $(\frac{1}{n})^b (1 - \frac{1}{n})^{n-b} = \Omega(\frac{1}{n^b})$.

本文考虑算法的运行时间, 表示算法找到一个最优解或者近似解的适应值评估次数. 对于随机算法的理论分析, 通常考虑运行时间的期望值, 称为期望运行时间或平均运行时间.

2.3 适应值划分方法

对于给定的优化问题, 我们感兴趣的是算法找到最优解或近似解的平均迭代次数. 适应值划分技术在演化算法的理论分析中得到了成功运用. 其原理是种群中最好的个体适应值一直都确保不会变差. 因此通过估计最好的个体的适应值变好的期望时间界, 来获得优化时间. 这种方法称为基于适应度划分的方法 (Fitness-Based Partitions) 或者适应度等级方法^[10]. 下面给出适应值划分的相关定义.

定义 1 适应值划分. 给定一有限的搜索空间 S , 不失一般性, 考虑适应值函数 $\text{fit}: S \rightarrow \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 最大化, 其中 $f_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). 搜索空间 S 划分成不相交的集合 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 使得 $A_i = \{x \in S \mid \text{fit}(x) = f_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 且 $f_1 < f_2 < \dots < f_m$. 则称 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 为基于适应值的划分.

引理 1 令 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 是一个基于适应值的划分, 其中集合 A_m 包含最优搜索点. 令 $x \in A_i$ 为当前的搜索点, 且令 $p(x)$ 为在下一代中产生一个新的搜索点 $x' \in A_{i+1} \cup \dots \cup A_m$ 的概率. 如果 $p_i = \min\{p(x) \mid x \in A_i\}$, 则算法 BCA 找到一个最优搜索点的期望优化运行时间为 $O(\sum_{i=1}^{m-1} p_i)$.

证明: 见文献[10].

引理 1 给出了利用适应值划分技术估计时间上界的方法, 该方法也将用于后面的分析.

3 B-Cell 算法求解 SAT 问题实例的性能分析

本文构造了两个 SAT 问题实例, 说明了 B-Cell 算法在某些情况下有效, 在某些情况下无效. 我们从理论上证明了, 对于某些 SAT 实例, B-Cell 算法的平均运行时间能够从指数级降到多项式级.

3.1 一个难解 SAT 实例

实例 φ_1 有如下子句:

$x_i \cup \bar{x}_{i+1}$ 和 $x_n \cup \bar{x}_1, 1 \leq i \leq n-1$, 即该实例的可满足性问题可表述为

$$(x_1 \cup \bar{x}_2) \cap (x_2 \cup \bar{x}_3) \cap \dots \cap (x_{n-1} \cup \bar{x}_n) \cap (x_n \cup \bar{x}_1).$$

如果 $|x| = k$, 则 φ_1 的适应值函数为

$$\text{fit}_{\varphi_1}(x) = \begin{cases} n, k = 0; \\ n-1, 1 \leq k \leq n-1; \\ n, k = n. \end{cases} \quad (2)$$

式中, $|x|$ 表示在 x 的指派中 1 的个数. 实例 φ_1 的适应值函数如图 1 所示. 很显然, 我们知道该 SAT 实例 φ_1 的全局最优解为全 1 的位串和全 0 的位串, 即 $x = (1 \dots 1)$ 或 $x = (0 \dots 0)$.

定理 1 B-Cell 算法求解实例 φ_1 的期望运行时间为 $\Omega(2^n)$.

证明: 实例 φ_1 类似于大海捞针函数 (needle-in-the-haystack)^[11]. 除了所有全为 0 的位串和所有全为 1 的位串之外, 其他搜索点均有相同

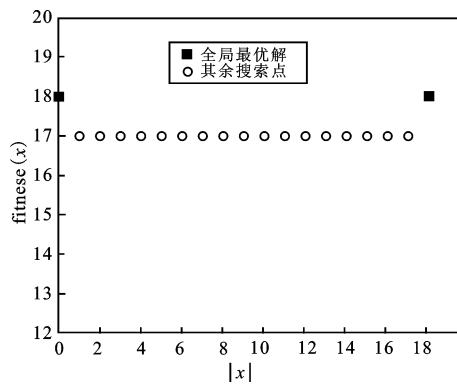


图 1 实例 $\varphi_1, n = 18$

的适应值. 对于该类函数, Droste 等人^[12] 证明了对于每一个 black-box 算法, 其期望优化时间为 $\Omega(2^n)$.

证毕.

3.2 一个易解 SAT 实例

实例 φ_2 有如下子句:

$x_i, 1 \leq i \leq n$ 和 $\bar{x}_i \cup \bar{x}_j, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j$.

如果 $|x| = k$, 则 φ_2 的适应值函数为

$$\text{fit}_{\varphi_2}(x) = k(2-k) + n(n-1). \quad (3)$$

式中, $|x|$ 表示在 x 的指派中 1 的个数. 实例 φ_2 的适应值函数如图 2 所示. 实例 φ_2 的适应值函数开始随着 1 的个数增加而增加, 然后, 随着 1 的个数增加而减少.

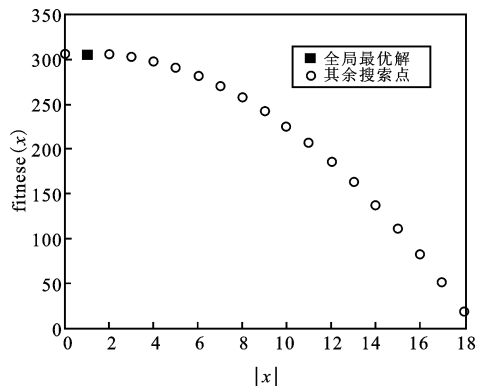


图 2 实例 $\varphi_2, n = 18$

很显然, 该 SAT 实例 φ_2 的全局最优解为仅含一个 1 的位串, 且为唯一的全局最优解.

定理 2 B-Cell 算法求解实例 φ_2 的期望运行时间为 $O(n^2 \log n)$.

证明: 如果当前解不是全局最优解, BCA 算法总能够以概率 $\Theta(\frac{1}{n^2})$ 使得适应值增加至少 1.

定义 $|x|_0$ 为搜索点 x 中 0 的个数, $|x|_1$ 为搜

素点 x 中 1 的个数. 因此根据实例 φ_2 的适应值函数分布情况, 可知实例 φ_2 的全局最优解为 $\{x \mid |x|_1 = 1\}$. 假设当前搜索点 x 中 0 的个数为 $|x|_0 = i$, 下面考虑几种情况.

情况 1: $i = 0$. 翻转该搜索点中任何一位均能达到全局最优解, 且 BCA 算法执行该翻转的概率为 $\Theta(\frac{1}{n^2})$.

情况 2: $i = n - 1$. 即为全局最优解.

现在考虑 $i \neq 0$ 且 $i \neq n - 1$ 的情况. 该 i 个 0 位的每一位翻转的概率为 $1/n^2$, 则使得适应值增加至少 1 的概率为 i/n^2 . 根据引理 1, 算法 BCA 找到实例 φ_2 的一个全局最优解的期望运行时间上界为 $O(\sum_{i=1}^n \frac{n^2}{i}) = O(n^2 \log n)$.

证毕.

表 1 表明了 BCA 算法在实例 φ_1 上无效, 即需要指数时间求解 φ_1 , 而对于实例 φ_2 , BCA 算法能够在期望多项式时间内进行求解.

表 1 B-Cell 算法求解 SAT 实例的运行时间

实例	运行时间
φ_1	$O(n^n)$
φ_2	$O(n^2 \log n)$

4 基于免疫的多目标优化器 IBMO

许多现实的优化问题包含多个相互冲突的目标. 一个多目标优化问题可形式化为

$$\begin{aligned} \text{Maximize } F(x) &= (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{s. t. } x &\in \Omega \end{aligned} \quad (4)$$

式中, Ω 为决策空间, $x \in \Omega$ 为决策向量. $F(x)$ 包含 m 个目标函数 $f_i: \Omega \rightarrow R, i = 1, \dots, m$. 式(4)中的每个目标是相互冲突的, 不存在一个单一解能够同时优化所有目标, 通常是搜索 Pareto 前沿.

如果下列不等式成立:

(1) 对于任意 $i \in \{1, \dots, m\}$, 满足 $f_i(x') \geq f_i(x)$;

(2) 存在 $j \in \{1, \dots, m\}$ $f_j(x') > f_j(x)$.

则称搜索点 x' 支配 x , 记作 $x' \succ x$. 如果不存在其他搜索点 x' 支配 x , 则称搜索点 x 为 Pareto 最优.

本文引入一个简单的基于免疫的多目标优化器 (Simple Immune-based Multi-objective Optimizer, IBMO). IBMO 算法是一个最简单的基于种群的用

于多目标优化的免疫算法. 我们证明了对于一个双目标 SAT 问题, IMBO 算法能够有效地找到整个 Pareto 前沿.

IMBO 算法包含一个可变大小的种群 P 用于存储所有个体, 这些个体不会被任意其他个体支配. 开始的时候, 种群初始化为一个单一元素. 在算法运行的每一代, 均匀随机地从种群中选取一个父代个体 x , 并使用 CHM 变异算子对 x 进行变异, 产生一个子代个体 x' . 如果 x' 不被种群中任意一个个体所支配, 且它的目标向量也不包含在种群中, 则 x' 将被加入到种群中. 最后, 所有被新生成子代个体支配的所有个体将从种群中移除.

IBMO 算法是一个简单的无参数的基于中群的多目标优化算法, 其描述如下.

算法 2: 基于免疫的多目标优化器 IMBO 算法

```

1: Begin
2:  均匀随机选取初始搜索点  $x \in \{0, 1\}^n$ ;
3:   $P \leftarrow x$ 
4:  While ( 终止条件不满足 ) do;
5:    从  $P$  中随机均匀选取一个元素  $x$ ;
6:    创建一个新解  $x' = \text{CHM}(x)$ ;
7:    If  $\neg \exists z \in P$ , 使得
         $z \succ x' \vee f(z) = f(x')$ 
8:      then
         $P \leftarrow (P \setminus \{z \in P \mid z \succ x'\}) \cup \{x'\}$ ;
9:  End If
10: End While
11: End

```

本文研究 IBMO 算法求解一个双目标 SAT 问题实例的性能. 该双目标 SAT 问题实例 bSAT₂ 定义如下. 对于 $x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n$, 实例 bSAT₂ 包含两个布尔公式 ξ 和 ζ .

其中 ξ 有以下子句:

$$x_i, 1 \leq i \leq n;$$

ζ 有以下子句:

$$x_i, 1 \leq i \leq n, \text{ 以及 } \bar{x}_i \vee x_j, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j$$

如果 $|x|_1 = k$, 则目标向量 (f_1, f_2) 为

$$(f_1, f_2) = (k, k(2-k) + n(n-1)) \quad (5)$$

式中, $|x|_1$ 表示在 x 的指派中 1 的个数. 实例 bSAT₂ 的目标空间如图 3 所示.

适应值向量 (f_1, f_2) 有两个目标. 第一个目标向量 f_1 为布尔公式 ξ 的满足子句的个数, 第二个目标向量 f_2 为布尔公式 ζ 的满足子句的个数, 这两个目标都需要最大化.

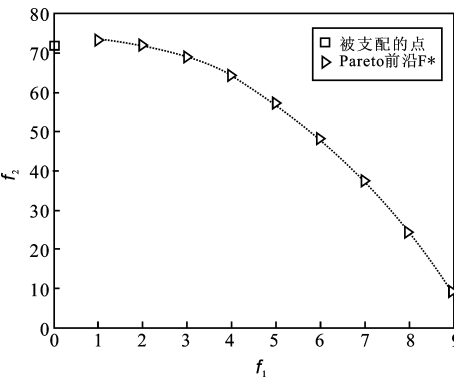


图 3 (f_1, f_2) 的目标空间, $n = 9$

因为不存在单一解能够同时优化两个目标,所以考虑寻找 Pareto 最优解集. 从图 3 可知,实例 bSAT_2 的 Pareto 最优解集为 $\rho^* = \{x \mid \forall x \in \{0,1\}^n \setminus x = 0^n\}$,即为整个搜索空间.

定理 3 IMBO 算法能够在期望运行时间 $O(n^3 \log n)$ 内找到实例 bSAT_2 的整个 Pareto 前沿.

证明证明的主要思想是,我们首先找到第一个 Pareto 最优点包含在群体中,然后再搜索整个 Pareto 集合.

因为适应值向量的形式为 $(k, k(2 - k) + n(n - 1))$ ($k \geq 1$),可知种群大小最多为 n . 注意到整个搜索空间为 $\{0,1\}^n$,除了搜索点 0^n 之外,其他所有搜索点都包含在种群中.

将整个搜索空间划分成 n 个子集 $A_k, k = 1, \dots, n$. 对于每一个子集 A_k 代表第一个目标值为 k 的搜索点. 考虑两种情况. 第一种情况是 IBMO 算法从一个搜索点 $x \in A_k$ 出发产生一个新的搜索点属于子集 A_{k-1} ,第二种情况是从搜索点 $x \in A_k$ 出发产生一个新的搜索点属于子集 A_{k+1} ,这两种情况对于 IBMO 算法来说都是接受的. 下面估计搜索点离开集合 A_k 进入集合 A_{k-1} 或 A_{k+1} 的概率.

使用引理 1 中的适应值划分技术. 对于第一种情况,因为 k 表示搜索点中 1 的个数,所有这些 1 位串中指定一位翻转并产生一个新的搜索点,该搜索点也将包含在种群中. 算法先随机从种群中选择一个搜索点,再从该搜索点 k 个 1 位串中选取任意一位进行变异的概率为 $\Theta(\frac{1}{n^2})$. 因此,搜索点离开 A_k 进入集合 A_{k-1} 的时间上界为 $\frac{n^2}{k}$. 与 A_k 进入集合 A_{k-1} 情况类似,搜索点离开 A_k 进入集合 A_{k+1} 的时间上界为 $\frac{n^2}{n-k}$. 从而,IBMO 算法找到整个 Pareto 前沿的期望运行时间

为 $O(n \cdot 2 \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k}) = O(n^3 \log n)$.

证毕.

表 2 说明了基于免疫的多目标优化器 IBMO 算法能够有效的优化双目标 SAT 实例.

表 2 IBMO 算法求解双目标 SAT 实例的运行时间

实例	运行时间
bSAT_2	$O(n^3 \log n)$

5 结束语

本文给出了一种简单免疫算法 BCA 在 NP 难 SAT 问题上的计算复杂性分析. 通过不同实例的分析,证明了不同特征的问题对于该算法是难的还是易的. 此外,提出了一种基于免疫的多目标优化器 IBMO,指出 IBMO 算法能够有效找到一个双目标 SAT 问题实例的 Pareto 前沿. 从理论的角度证实了免疫算法的有效性.

对于免疫算法的理论研究,仍然存在许多开放性的问题. 本文仅考虑了 NP 难 SAT 问题的一些具体实例的分析,由于随机算法理论分析具有困难性,对于一般性的 SAT 问题的理论分析如近似性能分析是未来有挑战性的工作. 一些其他变异算子如文献[6],对于优化问题特别是 NP 难问题的性能如何也是一个值得研究的方向. 此外,本文考虑的 BCA 算法种群大小为 1,这种简单的考虑能够通过变异过程认识什么类型的问题对于算法是有效的,什么类型的问题对于算法是无效的. 然而,对于免疫算法的种群规模、克隆数目等参数对于算法的性能有何影响还需要进一步研究. 这对于认识和理解免疫算法在优化问题特别是 NP 难问题上的运行机理,以及指导算法设计有较大意义,并将进一步丰富免疫算法理论成果.

参考文献:

[1] Garey M R, Johnson D S. Computers and intractability-a guide to the theory of NP-completeness[M]. New York, Freeman, 1979.

[2] Cook S. The complexity of theorem-proving procedures[C]//Proc of the 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, Assoc. Comput. Mach. New York, 1971; 151.

[3] Beame P, Kautz H, Sabharwa A. Towards understanding and harnessing the potential of clause learning [J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2004,

22(2): 319-335.

- [4] Hirsch E A, Kojevnikov a. UnitWalk: A new SAT solver that uses local search guided by unit clause elimination[J]. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2005, 43(1): 91-111.
- [5] Dasgupta D, Nilo L F. Immunological computation: theory and applications [M]. Boca Raton: CRC Press, 2008.
- [6] Kelsey J, Timmis J. Immune inspired somatic contiguous hypermutation for function optimization[C]//Genetic and Evolutionary Computation Conference. Heidelberg, Springer, 2003: 207-218.
- [7] Jansen T, Zarges C. A theoretical analysis of immune inspired somatic contiguous hypermutations for function optimization[C]//Proc of the International Conference on Artificial Immune Systems, ICARIS. Berlin, Springer, 2009: 80-94.
- [8] Jansen T, Oliveto P S, Zarges C. On the analysis of the immune-Inspired B-Cell algorithm for the vertex cover problem[C]//ICARIS 2011. Springer, Heidelberg, 2011: 117-131.
- [9] Jansen T, Zarges C. Computing longest common subsequences with the B-Cell algorithm[C]//Proc of the

11th International Conference on Artificial Immune Systems (ICARIS '12). Italy, Taormina, 2012: 111-124.

- [10] Wegener I. Methods for the analysis of evolutionary algorithms on pseudo-Boolean functions[C]//In Evolutionary Optimization. Norwell, USA, Kluwer Academic Publishers, 2002: 349-369.
- [11] Neumann F, Witt C. Bioinspired computation in combinatorial optimization-algorithms and their computational complexity [M]. Series, Natural Computing Springer, 2010.
- [12] Droste S, Jansen T, Tinnefeld K, et al. A new framework for the valuation of algorithms for black-box optimization[C]//Foundations of Genetic Algorithms 7 (FOGA). Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 2003: 253-270.

作者简介:

夏小云 男, (1982-), 博士, 讲师. 研究方向为计算智能与机器学习. E-mail: scutxxy@gmail. com.

周育人 男, (1965-), 博士, 教授, 博士生导师. 研究方向为计算智能、数据挖掘及社会网络.

(上接第 4 页)

- [4] Markuš N. Eye pupil localization with an ensemble of randomized trees[J]. *Pattern recognition*, 2014, 47(2): 578-587.
- [5] Valenti R, Sebe N, Gevers T. Combining head pose and eye location information for gaze estimation[J]. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 2012, 21(2): 802-815.
- [6] Yi D, Lei Z, Li S Z. A robust eye localization method for low quality face images[C]// *Biometrics (IJCB)*, 2011 International Joint Conference on. USA, Washington DC, 2011: 1-6.
- [7] Asadifard M, Shanbezaheh J. Automatic adaptive center of pupil detection using face detection and cdf analysis[C]// *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*. China, Hongkong, 2010: 3-5.
- [8] Tan X. Enhanced pictorial structures for precise eye localization under incontrolled conditions[C]// *Computer Vision and Pattern Recognition*, 2009. CVPR

2009. USA, Florida, Miami, IEEE Conference on, 2009: 1621-1628.

- [9] Kroon B, Hanjalic A, Maas S M. Eye localization for face matching: is it always useful and under what conditions[C]//*Proceedings of the 2008 international conference on Content-based image and video retrieval*. Canada, Niagara Falls, 2008: 379-388.
- [10] Valenti R, Gevers T. Accurate eye center location and tracking using isophote curvature[C]// *Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2008*. IEEE Conference on. USA, Anchorage, Alaska, 2008.

作者简介:

马越 男, (1989-), 硕士研究生. 研究方向为数字图像处理、集成电路设计.

贺光辉(通讯作者) 男, (1980-), 博士, 副教授. 研究方向为无线通信和多媒体系统的信号处理算法优化和 VLSI 架构设计. E-mail: guanghui. he@sjtu. edu. cn.